ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ
ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

Ασκηση 1

Να βρείτε όλους τους πιθανούς ομομορφισμούς (αν υπάρχουν)
i) $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_5$ και ii) $\varphi : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$.

ΛΥΣΗ

i) Παίρνουμε έναν γεννήτορα της $\mathbb{Z}_{12}$, έστω αυτός το $[1]_{12}$ και τον απεικονίζουμε σε τυχόν στοιχείο της $\mathbb{Z}_5$.
Δηλ. $\varphi([1]_{12}) = [a]_5$, $\forall [a]_5 \in \mathbb{Z}_5$
Γνωρίζουμε όμως ότι άν φ ομομορφισμος τοτε
$o([a]_5) \mid o([1]_{12}) = 12$ ①
όμως,

$$o([a]_5) = \frac{o([1]_5)}{(o([1]_5), a)} = \frac{5}{(5,a)} \overset{①}{\Big|} 12 \iff$$

$$\iff \frac{12}{\frac{5}{(5,a)}} = k \in \mathbb{N} \iff \frac{12}{5}(5,a) = k \in \mathbb{N}$$

Αυτό ισχύει μόνο για $a=5 \rightsquigarrow k=12 \in \mathbb{N}$
Αρα $\varphi([1]_{12}) = [5]_5 \equiv [0]_5$ ο μοναδικός ομομορφισμός (δηλαδή ο τετριμμένος)

ii) Ομοια και εδώ παίρνουμε το γεννήτορα $[1]_8$ και τον απεικονίζουμε στο τυχον στοιχείο $[a]_4$
Δηλ. $\varphi([1]_8) = [a]_4$, $\forall [a]_4 \in \mathbb{Z}_4$
Αλλά, $o([a]_4) \mid o([1]_8) = 8$ ①
καθώς επίσης

$$o([a]_4) = \frac{o([1]_4)}{(o[1]_4, a)} = \frac{4}{(4,a)} \overset{①}{\Big|} 8 \iff$$

$$\iff \frac{8}{\frac{4}{(4,a)}} = k \in \mathbb{N} \iff 2(4,a) = k \in \mathbb{N}$$

Εάν $a=1 \rightsquigarrow 2(4,1) = 2 = k \in \mathbb{N}$
Εάν $a=2 \rightsquigarrow 2(4,2) = 4 = k \in \mathbb{N}$
Εάν $a=3 \rightsquigarrow 2(4,3) = 4 = k \in \mathbb{N}$
Εάν $a=4 \rightsquigarrow 2(4,4) = 8 = k \in \mathbb{N}$
Αρα, οι πιθανοί ομομορφισμοί είναι:
$\varphi([1]_8) = [0]_4$ ή $[1]_4$ ή $[2]_4$ ή $[3]_4$.

Ασκηση 2

Να βρείτε όλους τους πιθανούς μη τετριμμένους ομομορφ.
i) $\varphi: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}$ και ii) $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$

ΛΥΣΗ

i) Παίρνουμε το γεννήτορα του $\mathbb{Z}_3$ για παράδειγμα το $[1]_3$ και το στέλνουμε στο $x \in \mathbb{Z}$
δηλαδή $\varphi([1]_3) = x$ ομομορφισμος
Γνωρίζουμε ότι το μοναδιαίο απεικονίζεται σε μοναδιαίο
άρα $\varphi([0]_3) = 0 = \varphi([3]_3) = \varphi(3[1]_3) = 3 \cdot \varphi([1]_3) =$
$= 3x \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ $\varphi([1]_3 \oplus [1]_3 \oplus [1]_3)$ ''ομομ.
Αρα, δεν υπάρχει ομομορφισμος πλήν του τετριμμενου

ii) Εδώ επιλεγουμε να στείλουμε τον γεννήτορα της $\mathbb{Z}$, εστω αυτος 1 σε ένα από τα στοιχεία του Z3 .
Δηλ. $\varphi(1) = [a]_3$, $\forall [a]_3 \in \mathbb{Z}_3$, $a = 1,2,3$
Παλι γνωρίζουμε ότι μοναδ. σε μοναδιαίο
άρα $\varphi(0) = [0]_3$. Επίσης αν $\varphi(1) = [1]_3$
$\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = [1]_3 + [1]_3 = [2]_3$
$\varphi(3) = \varphi(1+1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) + \varphi(1) = [3]_3 \equiv [0]_3$
Εαν $\varphi(1) = [2]_3$ τοτε
$\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = [2]_3 + [2]_3 = [4]_3 \equiv [1]_3$
$\varphi(3) = \varphi(1+1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) + \varphi(1) = [0]_3$
Αρα, οι πιθανοι ομομορφισμοι είναι:
$\varphi(1) = 0$ ή 1 ή 2 mod 3.